Prof. Dr. Alfred Toth

Grundzüge einer Theorie der Anzahlen

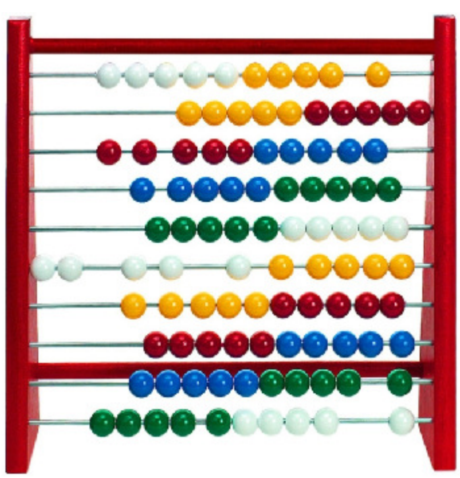
1. In Toth (2014-2015) sowie weiteren Arbeiten, in denen bisher Bausteine zu einer Theorie der Anzahlen geliefert wurden, hatten wir Zahl, Anzahl und Nummer im folgenden triadischen semiotischen Inklusionsschema dargestellt.

Zahl := (M)
↓
Anzahl:= (M → (M → O))
↓
Nummer: = (M → ((M → O) → (M → O → I))).

Danach hat also die Mathematik, die ontisch gesehen die Wissenschaft von den Zahlen ist, reine Mittelbezüge zum Gegenstand, d.h. Zeichen, die sowohl bezeichnungs- als auch bedeutungsfrei sind. Dagegen stellten Anzahlen Abbildungen reiner Zahlen auf Objekte dar, und eine Theorie der Anzahlen ist somit zwar bedeutungs-, aber nicht bezeichnungsfrei.

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ \Omega & \Omega & \Omega & \ldots \end{pmatrix} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots)$$

Die Objekte der Codomäne der Abbildung f können vorgeordnet sein wie im Falle des folgenden Abakus,



oder nicht-vorgeordnet sein wie z.B. bei den Äpfeln auf dem folgenden Bild

.

Somit ist das Zählen ein rein quantitativer Prozeß, das Abzählen hingegen, das zu Anzahlen führt, ein quantizierender Prozeß, vermöge der Abbildung von Zahlen auf Bezeichnungsfunktionen. Die Abbildung f produziert also referentielle Zahlen. Daher besteht auch ein fundamentaler Unterschied zwischen einer Zahlengleichung der Form

$1 + 1 = 2$

und einer Anzahlengleichung der Form

1 Apfel + 1 Apfel = 2 Äpfel.

Zur Theorie der Nummern, die sich gemäß dem obigen Inklusionsschema also mit Zahlen beschäftigt, die sowohl Bezeichnungs- als auch Bedeutungsfunktion haben, haben wir bereits viele Dutzende von Einzelarbeiten geliefert, die im "Electronic Journal" leicht auffindbar sind.

2. Anzahlen von Qualitäten und von Sorten

Die Anzahlgleichung

1 Apfel + 1 Apfel = 2 Äpfel

ist streng genommen unsinnig, da nicht bekannt ist, ob es sich um gleiche oder ungleiche Äpfel handelt. Diese können qualitativ-sortig oder quantitativ oder in beider Hinsicht ungleich sein. Bei sortiger Differenz

1 Gala-Apfel + 1 Jonathan-Apfel = ?

ist die Gleichung unlösbar, denn verschiedene Sorten sind nicht addierbar

Es besteht also die gleiche qualitativ begründete Unlösbarkeit wie im Falle von

1 Apfel + 1 Birne = ?

Im Falle von 1 Gala-Apfel und 1 Jonathan-Apfel hat man zwar keine Bedenken, als vorgebliche Lösung der Gleichung, d.h. als Summe, "2 Äpfel" hinzuschreiben, aber bereits im Falle von 1 Apfel + 1 Birne müssen die Qualitäten eliminiert werden, so daß die Standardlösung "2 Früchte" lautet. Wie ist es aber im Falle von

1 Apfel + 1 Tomate = ?

Da Äpfel zur Kollektivbezeichnung "Früchte", Tomaten aber zur Kollektivbezeichnung "Gemüse" gehören, und da keine Meta-Kollektivbezeichnung existiert, welche sowohl Früchte bzw. Obst und Gemüse umfaßt, ist diese Addition noch "unlösbarer" als diejenige von Apfel und Birne, und diese wiederum ist "unlösbarer" als diejenige von Gala- und Jonathan-Apfel.

3. Anzahlen von Qualitäten und von Quantitäten

Es gibt somit eine Art von qualitativer Unlösbarkeitshierarchie. Es gibt aber sogar eine Art von quantitativer Unlösbarkeitshierarchie. Man betrachte im Anschluß an Kap. 2 und zum Einstieg in das vorliegende Kap. 3 die beiden folgenden Äpfel, die offenbar gleichsortig sind, da sie am selben Baum wachsen.

Hier haben wir den scheinbar unproblematischen Fall

1 Jonathan-Apfel + 1 Jonathan-Apfel = 2 Jonathan-Äpfel,

aber ist diese Lösung wirklich korrekt? Der elementare Satz der Arithmetik, der verlangt, daß "nur Gleiches" addiert werden darf, ist ja so vage wie nur möglich, wie wir bereits in Kap. 2 gezeigt hatten. Aber was bedeutet gleich? Hinsichtlich Sortigkeit sind Jonathan-, Gala-, Gravensteiner- und sämtliche anderen Äpfel gleich, hinsichtlich "Frucht" sind aber auch Äpfel, Birnen, Bananen und Beeren gleich, hinsichtlich pflanzlicher Nahrung sind auch Obst und Gemüse gleich, hinsichtlich Nahrung sind z.B. Brot, Fleisch, Käse, Obst und Gemüse gleich, usw. Solange also nicht angebbar ist, was der Referenzbereich von Gleichheit ist, sind sämtliche Anzahlgleichungen wie die genannten unlösbar. Deshalb hatten wir in Toth (2015d) gezeigt, daß es sinnlos ist, die Lösbarkeit von Anzahlgleichungen über die Gleichheit der durch die Zahlen bezeichneten Objekte zu definieren und die entsprechenden Ergebnisse im folgenden Schema zusammengefaßt

Identität	Gleichheit	Ähnlichkeit
	Nicht-Gleichheit	Nicht-Ähnlichkeit
	Nicht-Identität	

Streng genommen sind also nur solche Anzahlgleichungen zuläßig und daher lösbar, die auf Identität, nicht aber auf Gleichheit beruhen, weil die Gleichheit gerade dadurch von der Identität verschieden ist, da ein einziges Merkmal, d.h. eine logische Eigenschaft genügt, um zwei Objekte als nicht-identisch zu definieren (vgl. Menne 1991, S. 100). Und genau diese Verschiedenheit führt ja gemäß Kap. 2 zur Unlösbarkeit qualitativer Gleichungen. Wenn wir nun aber die Lösbarkeit von Anzahlgleichungen über Identität statt Gleichheit definieren, bekommen wir ein noch viel schwerer wiegendes Problem, denn dann ist auch die obige Gleichung

1 Jonathan-Apfel + 1 Jonathan-Apfel = ??,

welche wir den am gleichen Baum wachsenden Äpfel zugeordnet haben, unlösbar, und sie ist es deshalb, weil Identität im Gegensatz zu Gleichheit, Ähnlichkeit und Verschiedenheit eine logisch 1-stellige Relation ist. Anders ausgedrückt: Bei Objekten kann Identität nur in Form von Selbstidentiät auftreten. Selbstidentisch ist nun zwar jeder der beiden Jonathan-Äpfel im obigen Bild, aber nicht beide Äpfel, und somit ist die Anzahlgleichung unlösbar. Man erkennt zwar zwei Apfel-Objekte auf diesem Bild, aber sie sind trotz gleicher Qualität vermöge paarweiser Nicht-Identität quantitativ verschieden. Daraus folgt, daß auch die Quantitäten qualitativ gleicher Objekte nicht addiert werden können.

4. Anzahlen von Qualitäten, Quantitäten und Maßen

Man betrachte die folgenden Hühnereier. Es handelt sich um Objekte, die qualitativ gleich, aber quantitativ ungleich sind

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Fällen von rein qualitativer, sowohl qualitativer als auch quantitativer und von rein quantitativer Ungleichheit sind diesen Eier-Objekten nun Maße zugeordnet. Diese sind semiotisch gesehen arbiträr, genauso wie z.B. die Größen von Schuhen, Hüten oder Kleidern. Wie steht es also um die Lösbarkeit der folgenden Anzahlgleichung

1 S-Ei + 1 XL-Ei = ?

Sie ist trotz Maß-Abbildung auf die Objekte immer noch unlösbar, da die Maße ja gerade quantitative Differenzen bezeichnen. Merkwürdigerweise bereitet aber die folgende Addition überhaupt keine Schwierigkeiten

50 g + 80 g = 130g,

obwohl ein S-Ei 50g und ein XL-Ei 80g wiegen kann. Aber Maßgleichungen sind eben keine Abbildungen von Zahlen auf Objekten, sondern von Zahlen auf Zeichen für Objekte und können daher problemlos addiert werden, da es sich hier gar nicht um Anzahlgleichungen handelt. Die Abbildung von Maßen auf quantitativ verschiedene, aber qualitativ gleiche Objekte erweist sich daher als ein Trick, um die in Kap. 3 festgestellte Unlösbarkeit quantitativer Gleichungen vermöge Nicht-Selbstidentität mehrerer Objekte trotzdem zu lösen. Daher ist es sogar möglich, auf bestimmte Objekte mehr als ein Maß abzubilden. So kann etwa eine Quantität Schnaps sowohl in Liter als auch in Gramm gemessen werden, und gerade für nicht-abzählbare Objekte, zu denen es also gar keine Anzahlgleichungen geben kann, stellen Maßabbildungen sogar die einzige Möglichkeit dar, Quantitäten zu addieren.

5. Die ontische Verschiedenheit von Zahlen und Anzahlen zeigt sich auch daran, daß Zahlengleichungen und Anzahlengleichungen nicht gemischt werden können, vgl. die folgenden, ebenfalls unlösbaren Gleichungen

1 Apfel + 1 = ?

50 g + 80 = ?

XL-Pullover + 42 = ?

Dagegen sind die entsprechenden Zahlengleichungen

$1 + 1 = 2$

$50 + 80 = 130$

$54 + 42 = 96$

problemlos lösbar, da hier, wie eingang gezeigt, reine Mittelbezüge auftreten, d.h. Zahlen, die mangels Bezeichnungsfunktion keine Anzahlen und mangels Bezeichnungs- und Bedeutungsfunktion keine Nummern sind. Es ist also fraglich, ob Hegel recht hatte, wenn er die Lösbarkeit der letzteren, aus qualitativen, qualitativ-quantitativen und quantitativ-qualitativen Gleichungen reduzierten quantitativen Gleichungen dadurch erklärte, daß er behauptete, die post-pythagoreische Mathematik habe "alle Qualitäten auf die eine Qualität der Quantität" reduziert. Davon abgesehen, daß Qualität und Quantität dichotomisch geschieden sind wie Subjekt und Objekt, da ihre Relation zur logischen Basisdichotomie L = [0, 1] isomorph ist, geht es hier gar nicht in erster Linie um die Differenz zwischen Qualität und Quantität, denn wie wir gesehen haben, sind diese ja nie strikt trennbar, sondern in erster Linie geht es darum, ob reine Zahlen, Zahlen, die auf Objekte abgebildet werden (Anzahlen) oder Zahlen, die auf Objekte abgebildet und in Interpretantenkonnexe eingebettet werden (Nummern) addiert werden sollen. Falls überhaupt, dann ist die Quantität-Qualität-Differenz aus der semiotischen triadischen Inklusionsrelation sekundär abgeleitet, aber diese und nicht jene entscheidet über die Lösbarkeit oder Unlösbar von Anzahlgleichungen.

Literatur

Toth, Alfred, Quantitative Ordnung von Qualität und qualitative Ordnung von Quantität. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2014

Toth, Alfred, Zählen, Abzählen und Aufzählen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015a

Toth, Alfred, Abzählen und Numerieren. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015b

Toth, Alfred, Qualität, Quantität und Maß. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015c

Toth, Alfred, Identität, Gleichheit, Ähnlichkeit. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015d

11.5.2015